

Diversas geometrías aplicadas a la música

(A la memoria de Francisco Guerrero y Miguel Ángel Guillén)

Introducción

De un modo u otro la música siempre ha caminado al lado de las matemáticas. Ciertos periodos históricos y estéticos se han acercado más a ellas; otros, sin embargo, han dado predominio a campos de otra índole tales como el literario. Desde Pitágoras hasta nuestros días el número aplicado a la música ha fascinado sobremanera, ya sea como herramienta al servicio de la técnica (construcción de viejos y nuevos instrumentos, entendiendo como nuevos instrumentos los basados en “software”, que realmente son únicamente algoritmos matemáticos), de la composición (mediante la creación de sistemas), o como lenguaje críptico metaliterario o religioso (utilización de ciertas combinaciones numéricas en un ámbito mágico-cabalístico).

El pasado siglo XX ha sido fascinante. El gran desarrollo de la física (teoría de la relatividad, mecánica cuántica, teoría de cuerdas...) ha inundado nuestra existencia de cierta luz y a la vez de muchas y nuevas preguntas. La aparición de los ordenadores hizo posible abordar grandes cantidades de cálculo en poco tiempo y ello propició el desarrollo de las matemáticas en campos tales como caos, geometrías fractales y otros muchos que sin la computación no eran nada fáciles de abordar aunque algunos de ellos hubieran comenzado su andadura en siglos precedentes. Por otro lado, la proliferación de los ordenadores personales, el bajo precio de la memoria y otros factores han hecho posible que podamos emprender en nuestras propias casas lo que antes era impensable.

El tránsito de conocimientos entre las diversas disciplinas ha producido un desdibujado de los límites de las mismas y no es extraño ver a un economista analizar el comportamiento de la bolsa a través de cálculos basados en técnicas de procedencia fractal o a un botánico tratando de encontrar respuestas a un determinado patrón de crecimiento de una especie vegetal utilizando secuencias numéricas basadas en los sistemas L (un determinado tipo de fractales). La música no es ajena a estas conexiones interdisciplinarias; necesita experimentar con lo que otras ciencias le ofrecen. Las matemáticas, sin lugar a dudas, son guía y solución para algunos de los nuevos retos que la música plantea.

El artículo que sigue trata de contar alguna de nuestras experiencias vividas durante los últimos años en relación con el material que propone el título del presente escrito y están en estrecha relación con la elaboración de la denominada “plataforma Cygnus X-1” (conjunto de programas de asistencia a la composición musical desarrollados por Carlos Frías y Carlos Satué en el lenguaje de programación FutureBasic) que partiendo de las ideas de Francisco Guerrero, continúa en constante expansión en múltiples direcciones, algunas de las cuales, como las que versan sobre geometría fractal aplicada a la creación de objetos musicales, se tocarán en estas líneas. La mayoría de estos procedimientos han sido utilizados en obras de Carlos Satué; no obstante, al margen de algunos ejemplos, aquello que se vaya detallando según el tipo de herramienta que llevemos entre manos, se aplicará a modelos sencillos de J.S. Bach, complejas geometrías provenientes del mundo de los fractales o bien introduciremos algún ejemplo de Francisco Guerrero.

Dado que el espacio del que disponemos es limitado nos centraremos únicamente en varios apartados que creemos de máximo interés: espacios 3D, sistemas de funciones iteradas, generación de una aproximación fractal a partir de un modelo musical y, finalmente, movimiento browniano. A lo largo de los distintos apartados expondremos algunas de las fórmulas utilizadas en la elaboración de los algoritmos, así como otras de tipo general que puedan resultar útiles.

Nuestro deseo es abrir en el lector una vía de reflexión acerca de estos procedimientos a la par que alentarle a extrapolar conocimientos de otras disciplinas (en particular de las matemáticas) al mundo de la música. Por otra parte, no es otra cosa que lo que ha sucedido siempre.

1- Proyecciones 3D

La posibilidad de introducir un objeto musical en un espacio 3D y rotarlo, desplazarlo, comprimirlo o expandirlo tridimensionalmente, para posteriormente proyectarlo de nuevo en la partitura es algo que resulta altamente interesante. Para ello debemos pensar que cada nota musical debe comportarse como un vector en un espacio dado 3D. Dicho vector contiene un valor para el parámetro **X**, otro para el **Y** y por último otro para el **Z**. La coordenada **X** es habitualmente asignada a fenómenos de duración temporal o también a impactos (punto donde arranca la duración de la nota en un espacio temporal). Una duración viene dada por un valor de **X** para el comienzo y otro valor de **X** para su finalización, salvo que sea un solo punto que represente una duración de valor 1. Habitualmente la coordenada **Y** queda ligada a valores de altura, los que por otra parte, a diferencia de las duraciones y el discurrir temporal de la pieza musical, tienen un registro muy limitado. Más allá de los cálculos, el máximo registro de alturas del que disponemos tomando como referente el ámbito MIDI responde a valores comprendidos entre 1 y 127 (por otro lado estos valores exceden con creces el registro orquestal lo que hace que sea suficiente para nuestros propósitos). La coordenada **Z** normalmente tomará los valores referidos a las dinámicas, sucediendo algo semejante a **Y** respecto de la estrechez del registro una vez finalizados los cálculos. Al igual que en las alturas, el registro dinámico máximo será de valores comprendidos entre 1 y 127 (valores MIDI que por otra parte tendremos que redondear para adaptarlos a una escala dinámica de un número relativamente bajo de expresiones; de hecho, en nuestro caso, se utilizará una escala que va desde *ppp* hasta *fff*). Este tipo de reparto de las coordenadas no tiene por qué ser necesariamente así. En teoría podríamos tomar cualquiera de los parámetros musicales y asignarlo a cualquier valor del vector (por ejemplo, una hipotética escala de articulaciones podría ser asignada a **X**). Como veremos más adelante, la interdependencia de **X**, **Y**, y **Z** en el cálculo es total y ello nos llevará a reconsiderar determinadas situaciones musicalmente paradójicas en cuanto a la relación que hayamos prefijado de antemano para la elaboración de cualquier transformación en el espacio 3D. No obstante, para los casos que llevaremos entre manos y que mostraremos como ejemplos utilizaremos un volcado de valores como se ha descrito en líneas precedentes; es decir, sin entrecruzamiento de parámetros.

Como hemos podido intuir, será necesario trasladar los valores simbólicos de las notas a valores numéricos y tal como apuntábamos anteriormente utilizaremos valores de la escala MIDI dado el alto grado de practicidad que ofrecen. La utilización de espacios menores al semitono en las alturas o menores que la unidad en las dinámicas es posible si no truncamos los valores eliminando la parte decimal del cálculo. También debe ser posible introducir valores decimales en cada uno de los parámetros antes de efectuar las operaciones de transformación (por ejemplo podríamos codificar Do4 cuarto de tono como 61.5 si tomamos el Do4 como valor 61). Tras las operaciones será necesario cierto redondeo para devolver los valores numéricos a simbólicos. Pongamos el siguiente ejemplo: si deseamos pasar el valor 61.4256985 a la escala de alturas, podríamos hacerlo como Do4+, sin embargo el valor 61.2145758 podría truncarse y con ello obtendríamos simplemente Do4 en dependencia de dónde hubiésemos fijado los límites del cuarto de tono. Los valores referidos a las duraciones e impactos disponen de registros tan anchos como el objeto musical precise, sin embargo también están sometidos al redondeo. Debemos pensar que cada posición de **X** responde a una duración temporal mínima, pongamos a la del valor de una semifusa; si no deseamos ir mas allá de esta unidad y tenemos muchos impactos comprendidos en el espacio temporal de dicha semifusa cuya parte decimal es desigual, no tendremos mas remedio que reagruparlos y hacerlos aparecer como un acorde, renunciando a su autentica posición de impactos secuenciados. Una vez que nuestro objeto musical está codificado numéricamente y emplazado en un hipotético espacio 3D estará en situación operativa.

El paso de 2D a 3D conlleva considerables esfuerzos de cálculo. En realidad, hablando coloquialmente, el espacio 3D encierra muchos rincones de difícil acceso; de hecho, las proyecciones que se podrían realizar a partir de un espacio 3D sobre planos 2D son infinitas.

Tomando esto en consideración, únicamente se optó por las transformaciones más básicas como pueden ser:

- Rotación en el eje de **X**, **Y**, y **Z**.
- Expansión-Contracción en cada una de las coordenadas
- Desplazamiento igualmente en cada una de ellas.
- Rotación alrededor de un eje arbitrario delimitado por dos vectores.

Con modificaciones sencillas del algoritmo o combinándolo con otros podríamos conseguir interesantes transformaciones tales como la adscripción al sistema de un efecto de perspectiva, lo que haría mucho más realistas las percepciones de las distintas transformaciones y podríamos además proyectar el efecto de la misma en la partitura.

La transformación en alguna de sus coordenadas de manera aislada también es posible si despreciamos el resultado de las otras. Tengamos presente que las 3D encierran las posibilidades de 2D y de 1D. También podríamos extrapolar y pensar en algoritmos que trabajasen el objeto musical en nD; de igual manera, el algoritmo podría colaborar con otros sistemas dinámicos. Como ejemplo de esto último, pensemos en las torsiones que se producirían en el objeto que transformamos al variar regular o irregularmente el valor del ángulo en cada nuevo punto de **X**. Algo relativamente sencillo y musicalmente interesante podría ser aplicar una determinada proporción continua a las distintas transformaciones, como en el caso de elaborar sucesivas rotaciones en un eje en el que cada transformación tuviese un valor angular basado en una relación áurea respecto del ángulo de su anterior transformación, o que esta proporción continua se manifestase no solo en el ángulo, sino en cada uno de los parámetros. Todo esto excede las posibilidades de este escrito por lo que no las trataremos aquí.

Hay varias técnicas para trabajar el espacio 3D. Quizá una de las más utilizadas es la que opera con matrices de cuaternios (conjunto de cuatro números tal como $\mathbf{q}=(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$). Otra técnica es trabajar con coordenadas esféricas (aunque al final siempre hay que pasar a cartesianas) y quizá la más sencilla sea operar directamente con coordenadas cartesianas a través de las formulas que expondremos a continuación:

- La rotación en el eje de **X** puede hacerse utilizando la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} X_f &= X_i \\ Y_f &= \cos(\varphi_X) * Y_i - \text{sen}(\varphi_X) * Z_i \\ Z_f &= \text{sen}(\varphi_X) * Y_i + \cos(\varphi_X) * Z_i \end{aligned}$$

Siendo X_f , Y_f , y Z_f los valores de los parámetros **X**, **Y**, y **Z** de llegada respectivamente. X_i , Y_i y Z_i son los valores de los parámetros de partida y ángulo **X** es el ángulo de giro que aplicaremos al eje de **X**.

- La rotación en el eje de **Y** podemos hacerla con la fórmula siguiente.

$$\begin{aligned} X_f &= \text{sen}(\varphi_Y) * Z_i + \cos(\varphi_Y) * X_i \\ Y_f &= Y_i \\ Z_f &= \cos(\varphi_Y) * Z_i - \text{sen}(\varphi_Y) * X_i \end{aligned}$$

El ángulo **Y** es el ángulo de giro en el eje de **Y**. El resto de los valores han sido comentados con anterioridad.

- La rotación en el eje de **Z** puede hacerse teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} X_f &= \cos(\varphi_Z) * X_i - \text{sen}(\varphi_Z) * Y_i \\ Y_f &= \text{sen}(\varphi_Z) * X_i + \cos(\varphi_Z) * Y_i \\ Z_f &= Z_i \end{aligned}$$

Donde el ángulo **Z** es el ángulo que aplicamos al giro del eje **Z**.

- La expansión contracción viene dada mediante una simple multiplicación

$$\begin{aligned} X_f &= X_i * C_X \\ Y_f &= Y_i * C_Y \\ Z_f &= Z_i * C_Z \end{aligned}$$

Siendo C_n cualquier número real no nulo, aunque hemos de saber que si C_n es mayor de 0 y menor de 1 el objeto se contraerá; la expansión se efectuará cuando este factor sea mayor de 1. Habrá que tener en cuenta el signo del factor. Si multiplicamos el objeto por -1 obtendremos como resultado su simétrico respecto al origen de coordenadas (multiplicando los valores de Y por -1 obtendríamos lo que en música conocemos como inversión).

- El desplazamiento viene dado por una simple suma:

$$\begin{aligned} X_f &= X_i + D_X \\ Y_f &= Y_i + D_Y \\ Z_f &= Z_i + D_Z \end{aligned}$$

Deberemos tener en cuenta que los procesos de transformación no son conmutativos, por lo tanto el orden de los mismos debe ser tenido en cuenta.

Otro problema a considerar es el emplazamiento en el espacio 3D del objeto que vamos a transformar. Según lo que pretendamos hacer será necesario centrar el modelo para que rote sobre sí mismo (téngase en cuenta que rota todo sobre el origen centro y si nuestro modelo aparece en una esquina el resultado podría ser completamente distinto del que obtendríamos si el modelo estuviese centrado).

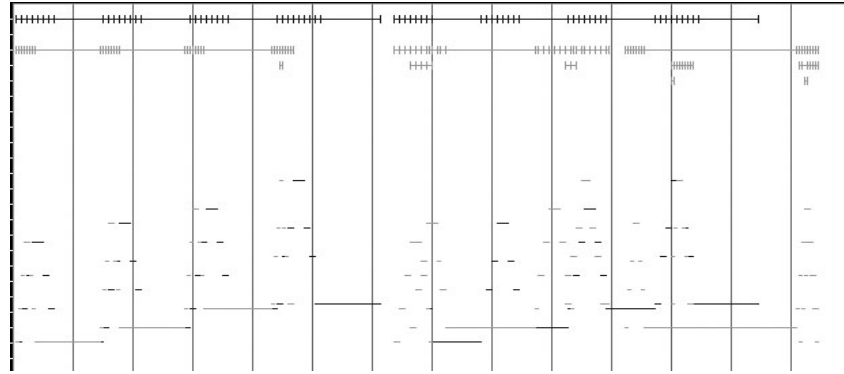
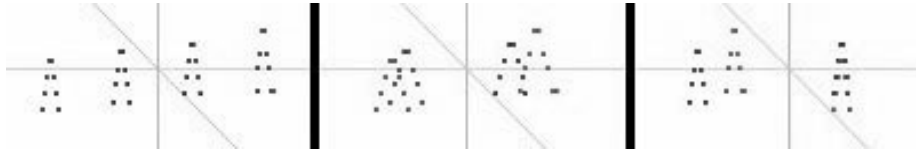
Una de las paradojas musicales es la interdependencia de cada uno de los parámetros entre sí. Pongamos el siguiente ejemplo: una Z profunda de -127 en un impacto (X) cercano a 0 al ser rotada en el eje de Y en sentido contrario a las agujas del reloj (supongamos unos 90 grados) producirá una modificación en la posición de X bastante alejada del punto 0 (se irá hacia la izquierda). Si el valor de Z hubiese sido de -10, con igual rotación el punto X de llegada hubiese estado mucho más cerca del centro que el anterior. Queremos decir con esto que los valores de las dinámicas acaban influyendo en las posiciones de los impactos (y al revés) en las rotaciones del eje de Y . Sucede algo parecido en la rotación del eje de Z , pues la posición de X determina la nueva posición de Y (al igual que la posición de Y determina también la de X), y por último en la rotación del eje de X las dinámicas influyen en las alturas de llegada, así como las alturas también son determinantes para las dinámicas finales.

Imaginemos las posibles paradojas si hubiésemos hecho una distribución del tipo alturas para X , articulaciones para Y y timbres para Z . Una vez que nos hemos familiarizado con esto podemos obtener interesantes transformaciones en el espacio 3D.

Para abordar el proceso de transformación 3D, al igual que haremos con los siguientes tipos de procesos, se ha utilizado el programa Campos de la plataforma Cygnus -X1. En él podemos ver la partitura codificada numéricamente bajo diferentes puntos de vista. Uno de ellos es el denominado líneas instrumentales-duración-materiales. Aquí cada línea de abscisas representa a un instrumento a lo largo del espacio temporal el cual está cortado por líneas verticales que representan los compases. Los distintos colores representan la adscripción a un determinado tipo de material arquitectónico. Cada duración viene representada por una línea horizontal cortada por otra pequeña línea vertical lo que nos indica el impacto o punto de comienzo de la duración.

La visión alturas-duraciones-material nos muestra las posiciones de Y o alturas, el color se refiere a la pertenencia a un determinado número de material y la duración viene representada por la extensión horizontal de cada línea. En esta visión normalmente no podremos localizar el instrumento al que pertenece la curva salvo que aislemos uno solo o por el efecto del color distingamos entre unos pocos.

Abajo, en el cuadro de la izquierda, un modelo extraído del Concierto para Violín y Orquesta de Alban Berg (primera aparición del violín) con sus dinámicas originales, girado en el eje de Y 61 grados. A la derecha, el mismo objeto en igual rotación, pero con las dinámicas intencionadamente modificadas. Obsérvese la gran diferencia en los resultados: colocamos un paso intermedio de 16° en la imagen central.



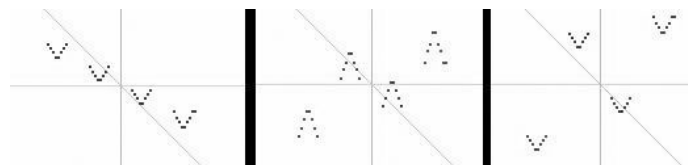
En la imagen superior, vemos en la partitura codificada las dos visiones (duración-instrumento-material y duración-material-altura) del ejemplo de Alban Berg comentado más arriba. A la izquierda, el objeto con sus dinámicas originales; debajo y en color claro, el resultado de un giro de 61° en el eje de Y. A la derecha se puede apreciar el mismo objeto con las dinámicas forzadas intencionadamente para apreciar las variaciones que se producen a causa de ello; debajo y en color claro, en primer lugar el resultado de girar 16° en el eje de Y; seguidamente, con un giro de 61°. El efecto puede apreciarse mejor una vez traspasado a grafía tradicional (imagen inferior), en la que además se puede constatar que el giro en el eje de Y afecta también a X, en este caso los impactos, creando polifonía en algunos puntos.

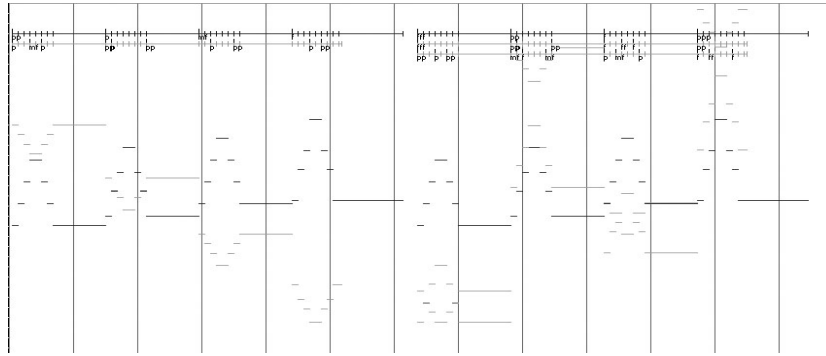
El tema de Alban Berg con sus dinámicas originales. Debajo, un giro de 61° en el parámetro de Y.

El mismo tema con dinámicas libremente cambiadas para conseguir otros efectos. Justo debajo, el resultado que ofrece un giro de 16° en el parámetro de Y.

El objeto tras aplicarle un giro de 61° en Y. Las diferencias con el primer resultado (segundo pentagrama) también con un giro de 61°, obedecen al cambio de las dinámicas.

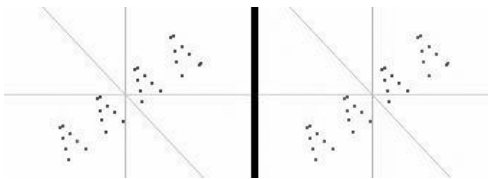
La siguiente imagen muestra una rotación del mismo modelo en el eje de X. El cuadro primero, con sus dinámicas originales, girado 118°. Los cuadros siguientes muestran el modelo con las dinámicas modificadas: el cuadro central como paso intermedio a 27° y el de la derecha a 118°.





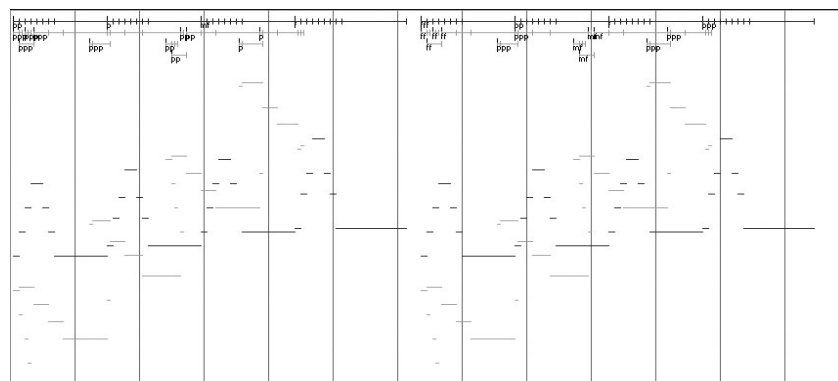
El ejemplo anterior, en la partitura virtual codificada, de nuevo en las dos visiones. A continuación, la imagen en grafía tradicional.

El ejemplo de Alban Berg con dinámicas originales y con una transformación causada por un giro en X de 118° (primer pentagrama). En el segundo y tercer pentagrama, con las dinámicas cambiadas, con un giro en X de 27° y 118° respectivamente.



A la izquierda, el modelo con las dinámicas originales girado 30° en el eje de Z. A su lado, el mismo objeto en el que se modificaron las dinámicas antes de introducirlo en el proceso. Obsérvese que no hay cambios salvo en el color de los puntos pues estos representan la “profundidad” (en este caso, los valores de Z que corresponden a las dinámicas).

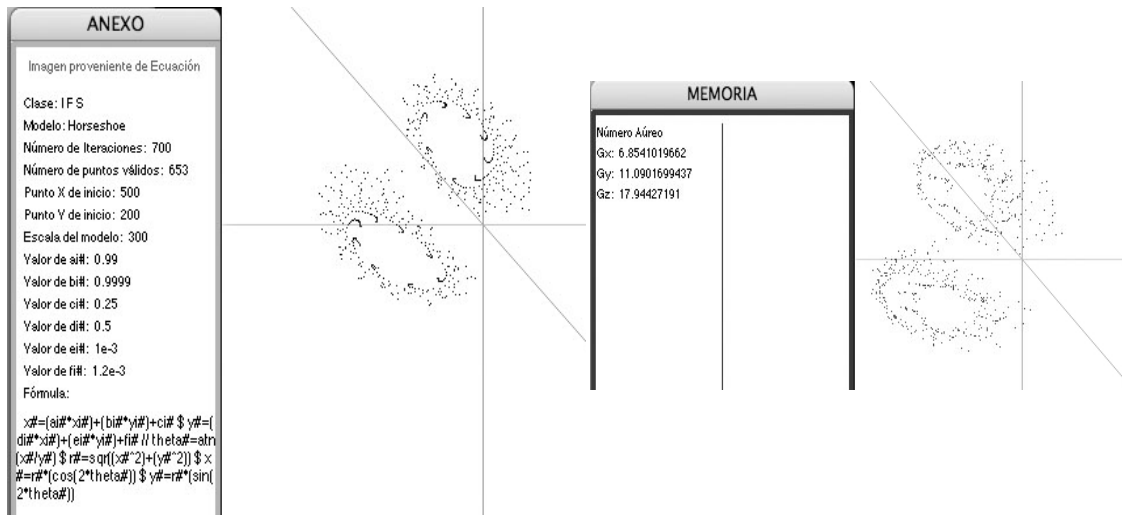
Debajo, la representación en las dos visiones del ejemplo anterior. La siguiente imagen muestra la partitura en grafía tradicional (se octavarón los resultados por ser muy bajos).



El ejemplo de Berg girado 30° en Z. Las tres primeras pautas, corresponden al modelo original. Las tres últimas, con las dinámicas cambiadas.



Aquí tenemos un ejemplo más complejo tomado de una imagen generada por un algoritmo de IFS.



Arriba, la imagen de la derecha nos muestra el objeto transformado utilizando saltos numéricos basados en la proporción áurea tal como se apuntó anteriormente en las posibles especulaciones al tratar el algoritmo.

Otro interesante procedimiento en el espacio 3D es la rotación de un objeto musical alrededor de un eje arbitrario delimitado por dos vectores. Para este proceso se ha utilizado una formulación algo más compleja:

$\mathbf{A}=(A_x, A_y, A_z)$ y $\mathbf{B}=(B_x, B_y, B_z)$ son los dos puntos que, tomando la dirección desde el primero al segundo definen el eje y $\mathbf{P}=(P_x, P_y, P_z)$ es el punto que va a girar alrededor del mismo. \mathbf{P}' es el punto \mathbf{P} tras haber girado “ α ” radianes alrededor de dicho eje.

El vector unitario que apunta de \mathbf{A} a \mathbf{B} es \mathbf{n}

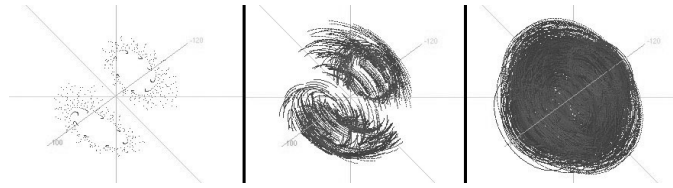
$$(n_x, n_y, n_z) = \frac{(B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z)}{\sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2}}$$

y

$$P' = A + [n \bullet (P - A)] * n + \cos(\alpha) * [(P - A) - [n \bullet (P - A)] * n] \pm \text{sen}(\alpha) * [n \times (P - A)]$$

El \bullet no es un producto normal sino escalar y el \times es un producto vectorial. El \pm es así, ya que \mathbf{P}' puede rotar en direcciones opuestas.

El objeto generado por el algoritmo IFS mostrado anteriormente, esta vez girando en un eje arbitrario dejando la estela de la rotación. La primera secuencia muestra el objeto con el eje y el valor dado a las Z . La secuencia continúa con el giro a un valor de 48° y finalmente con una rotación completa de 360° .



La aplicación de perspectiva al algoritmo puede resultar altamente interesante para la visualización del objeto 3D de forma más realista como se ha comentado con anterioridad. Por otra parte, podremos beneficiarnos de ello y obtener así una transformación en perspectiva musicalmente útil. Podemos conseguir el efecto de perspectiva multiplicando las coordenadas X e Y de cada punto por la inversa de la distancia de la coordenada Z al observador.

Llamaremos D a la distancia del observador y esta debe ser al menos del orden del tamaño del punto mas alejado de la figura centro. Supongamos un ancho de ventana de 600 puntos (ancho=600) y un alto de otros 600 (alto=600).

C será un factor contractivo arbitrario, como por ejemplo 0.75

$$\begin{aligned} C &= 0,75 \\ D &= C * \text{ancho} \\ \text{Offset}_X &= \text{ancho}/2 \\ \text{Offset}_Y &= \text{alto}/2 \end{aligned}$$

Offset_x y Offset_y sirven para centrar el objeto.

$$\begin{aligned} K_Z &= D/(D + Z[i]) \\ X &= X[i] * K_Z + \text{Offset}_X \\ Y &= Y[i] * K_Z + \text{Offset}_Y \end{aligned}$$

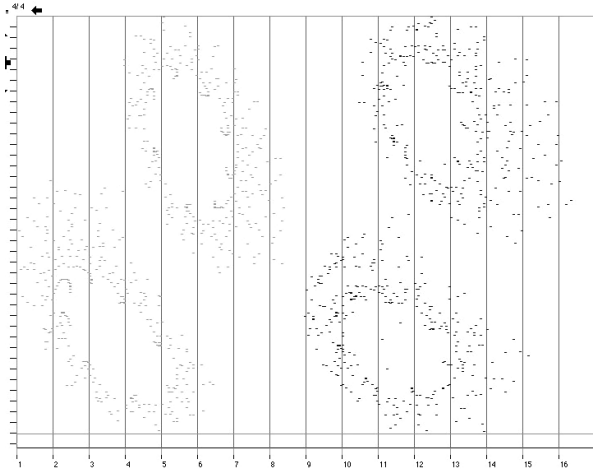
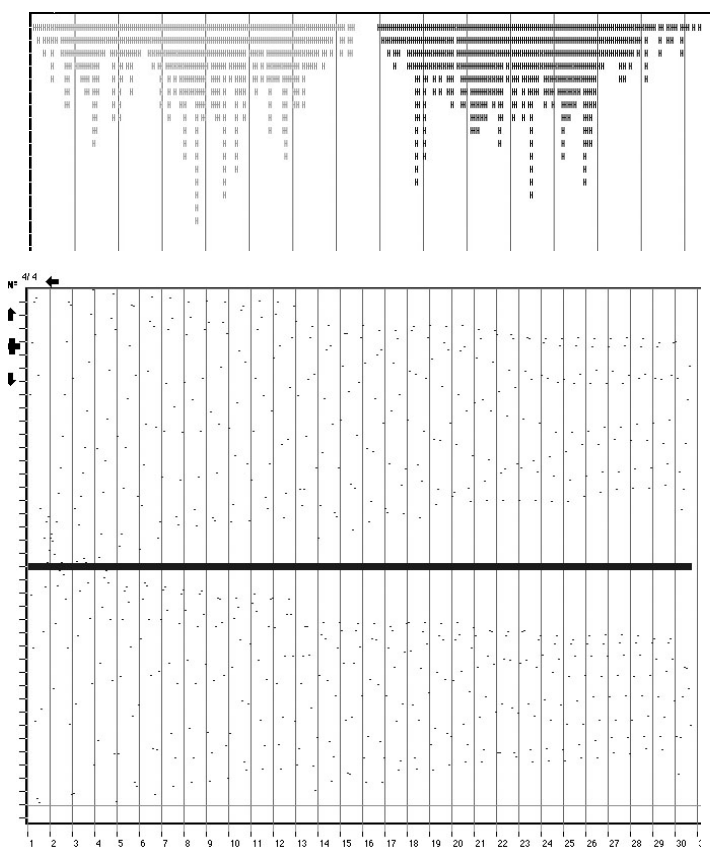
$X[i]$, $Y[i]$, $Z[i]$ son cada uno de los puntos de inicio de X , Y y Z respectivamente.

K_z es la razón que resulta de dividir $D/(D+Z[i])$ y multiplicará a cada coordenada de X e Y de inicio; posteriormente se le sumará el desplazamiento Offset_x y Offset_y respectivamente para obtener las nuevas coordenadas de X e Y .

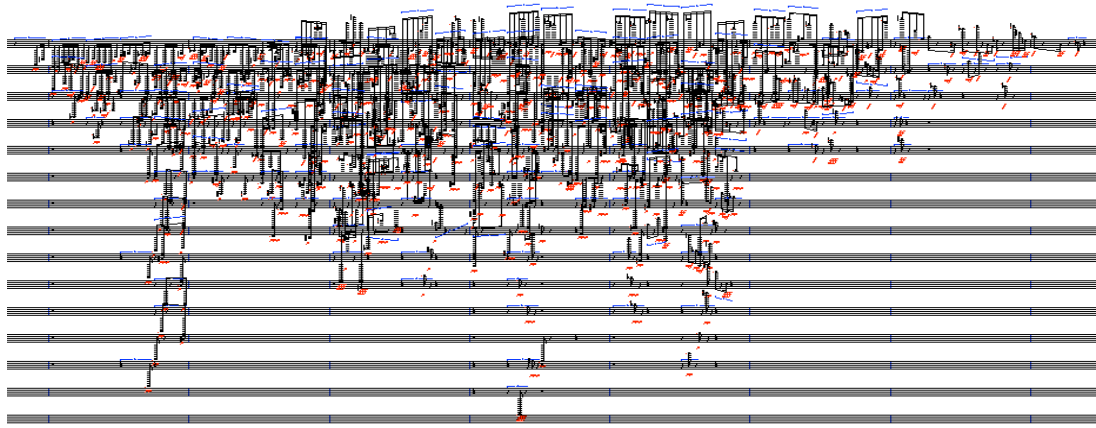
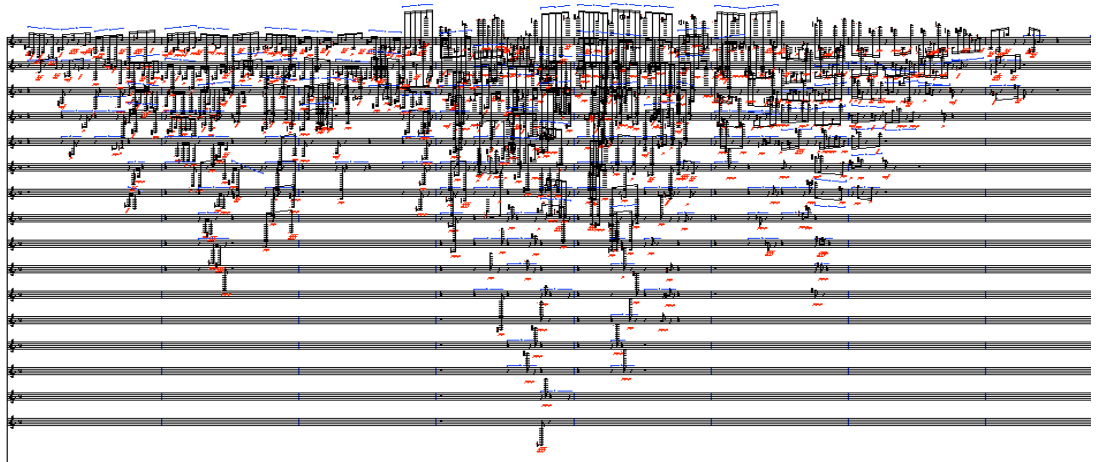
1.1 Posibles interpretaciones al volcar los resultados a la partitura gráfica.

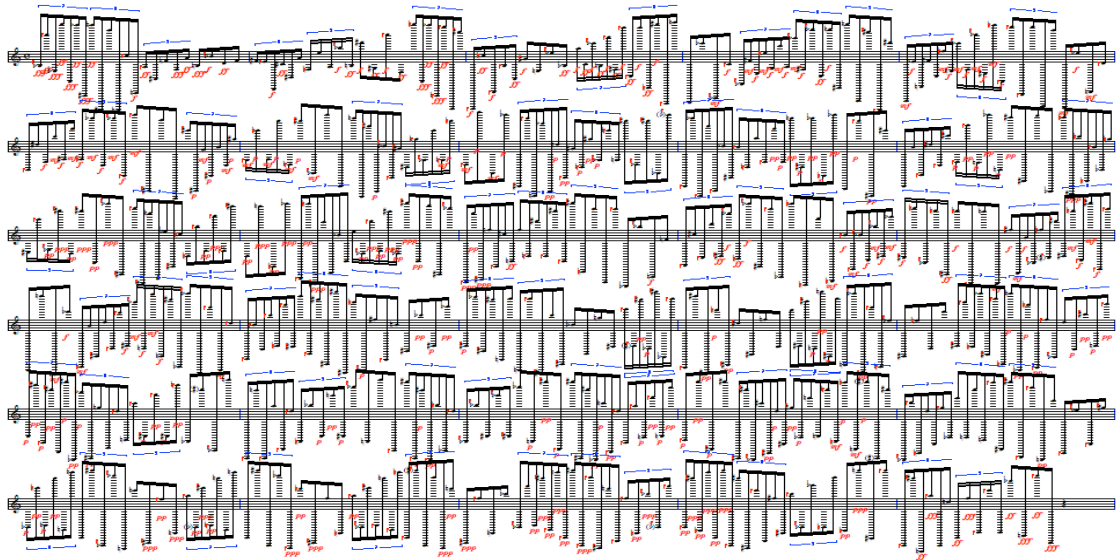
A la hora de proyectar nuestros resultados a la partitura debemos recorrer el camino contrario y devolver a escritura simbólica la partitura codificada numéricamente. Cuando realizamos este proceso podemos encontrarnos con un sinfín de dificultades que deberemos resolver: así, objetos de tamaño enorme que exceden el registro de las alturas (127) o puntos que ocupan posiciones negativas. En el primer caso habrá que eliminar las notas que exceden el registro o bien comprimir el objeto de modo que quepa en el ámbito del posible registro instrumental al que vamos a proyectar la transformación. En el segundo caso habrá que positivar los números negativos para que los pueda asimilar el sistema (no existe un valor de $-F$). Este tipo de situaciones nos obliga a modificar nuestro resultado buscando soluciones prácticas, tales como nuevas compresiones con objeto de situar el resultado dentro de registros posibles o bien excluir aquello que quede fuera de registro como acabamos de apuntar. También podemos intentarlo desplazando fuera de las zonas negativas los distintos parámetros.

¡Atención! Transformaciones muy drásticas producirán resultados absolutamente irreconocibles y se percibirán como materiales nuevos y no como transformaciones. Cada modelo es capaz de producir infinitas transformaciones. Somos nosotros los que debemos decidir cuales servirán en cada momento a nuestros propósitos.



Las dos imágenes superiores muestran el objeto generado por el algoritmo IFS en las dos visiones. En color claro, el objeto original; en color oscuro, transformado por giros en los tres parámetros. A la izquierda y en visión superpuesta el mismo objeto trasvasado esta vez leyendo el parámetro Y y dando duraciones artificiales con valor 1 (el objeto aparece así “desenrollado”...). La línea central oscura corresponde a la visión instrumento-duración y está tremendamente apelmazada por efecto de la escala. Debajo, su representación (grosso modo) en grafía tradicional.





Obsérvese como el objeto, leído en una sola línea, encierra varios perfiles a la vez.

2. Sistema de funciones iteradas.

Esta herramienta es ya un clásico en el mundo de los fractales (baste recordar la típica imagen del helecho de Barnsley). Como casi todos los algoritmos de esta clase, tienen la característica de la reiteración y participa de las dos grandes particularidades de dichos objetos: la autosimilitud y la dimensión fraccionaria.

Uno de los atractivos del I.F.S. es su espectacularidad gráfica y la sencillez de sus ecuaciones. Un I.F.S. es un sistema finito de ecuaciones contractivas. Cada función al ser iterada converge hacia un punto fijo que es el atractor del sistema dinámico en cuestión. Si se aplican varias funciones (un sistema) sobre la figura original obtendremos una imagen por cada una de ellas; es decir, n en un primer paso, en una segunda iteración obtendríamos n^2 , en una tercera n^3 y así sucesivamente hasta llegar a n^n . En este caso el atractor no es ya un solo punto sino lo que se llama un “compacto”.

Sea cual fuere el proceso de partida siempre llegaremos al mismo resultado. El final del proceso iterativo es el atractor.

Las formulas empleadas habitualmente (para 2D) las mostramos a continuación en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{aligned} x' &= a * x + b * y + e \\ y' &= c * x + d * y + f \end{aligned}$$

Siendo x' e y' los puntos de “X” e “Y” tras haber sufrido la transformación. Los llamados coeficientes de afinidad son **a**, **b**, **c**, **d**, los relacionados con la traslación son **e** y **f**, el primero para desplazar el valor de “X” y el segundo para el de “Y”. Los coeficientes **a** y **d** si **b** y **c** están a 0, actúan como contractores, **a** para el valor de “X” y **d** para el valor de “Y”. Los coeficientes **b** y **c** están relacionados con los giros que se producen en la matriz de afinidad, sin embargo su manejo no es sencillo puesto que interactúan con **a** y **d** (muy útil para transformaciones de “cizallamiento”).

Podríamos apuntar las siguientes fórmulas generales para el cálculo de estos coeficientes:

$$\begin{aligned}
a &= K_x * \cos(\varphi_1) \\
b &= -K_y * \sen(\varphi_2) \\
c &= K_x * \sen(\varphi_1) \\
d &= K_y * \cos(\varphi_2)
\end{aligned}$$

Tomamos K_x como el factor contractivo de los puntos de “ X ”; K_y hace lo propio con los puntos de “ Y ”. Tenemos la posibilidad de operar con dos ángulos o bien igualar sus valores comportándose entonces como si de uno solo se tratase (en cuyo caso, operaría giros en un hipotético eje de Z). Podemos proceder realizando en primer lugar estas operaciones y posteriormente con los coeficientes hallados operar con las fórmulas dadas anteriormente.

Por otra parte, este tipo de sistemas admite un sinfín de modificaciones tanto en las partes previas a la consecución de los valores de los coeficientes, como una vez que éstos han sido calculados. Quizás una de las más sencillas es la aplicación del giro del ángulo Q y centro origen, una vez que hemos realizado una contracción (manteniendo en valores 0 los coeficientes b y c) con o sin desplazamiento a través de:

$$f(x', y') = (x * \cos(Q) - y * \sen(Q), x * \sen(Q) + y * \cos(Q))$$

(en este caso sin desplazamiento). La fórmula es semejante a las anteriores que se han utilizado para hallar los coeficientes a , b , c y d . En este caso operamos con un solo ángulo tras haber realizado la contracción de modo que los resultados responden de manera más clara a nuestras expectativas.

El sistema suele operar con varias transformaciones a la vez y si partimos de un objeto que contiene muchos puntos y nuestro propósito es iterarlo un buen número de veces, debemos pensar en la gran cantidad de potencia de cálculo que será necesaria, no tanto por la simpleza de las ecuaciones cuanto por el número de veces que estas deben operar.

Imaginemos un objeto modelo de 8 puntos que introduciremos en el algoritmo operando 3 transformaciones y 6 iteraciones. El devenir de puntos resultantes será $8*3=24$ puntos en la 1ª iteración, $24*3=72$ en la 2ª, $72*3=216$ en la 3ª, $216*3=648$ en la 4ª, $648*3=1944$ en la 5ª, y $1944*3=5832$ en la sexta. Está claro que 5832 puntos (x,y) asignados a impactos-alturas son muchas notas para distribuir entre un reducido número de instrumentos.

En cada una de las transformaciones podríamos incluir el parámetro de la probabilidad de que suceda dicha transformación o no. La forma de adaptar este parámetro, aunque semejante, suele variar de unos algoritmos a otros. Deberíamos tener en cuenta que cada transformación W_i al asignársele un valor de probabilidad P_i tendría que dar el $\sum P_i=1$. Con probabilidad 1, el objeto en transformación convergerá siempre al atractor A del propio I.F.S.

Un procedimiento inverso permitiría sustituir una imagen real por el atractor A de un I.F.S. El problema es de gran complejidad y está fuera de lugar en estas líneas, sin embargo podríamos imaginar la compresión de una sinfonía clásica a través de un proceso inverso de I.F.S en tablas de transformación que fuesen capaces de su reconstrucción exacta con posterioridad al reactivar de nuevo el algoritmo. Esto es algo que desde hace ya mucho tiempo se trabaja en el mundo de la imagen.

El siguiente cuadro muestra una tabla de 2 hipotéticas transformaciones con las que podría trabajar un algoritmo de IFS. En la primera fila tenemos los coeficientes que acabamos de comentar. La segunda fila muestra los valores de la primera transformación que asignaremos a cada uno de dichos coeficientes y los de la tercera fila los relativos a la transformación segunda. Como vemos en la primera transformación, los valores de X se contraerán hasta alcanzar el 0.333 de su valor y lo propio sucederá en Y dado que b y c están a 0. No habrá desplazamiento ni en X (el punto donde comienzan las notas) ni en Y (lo que representaría el transporte en un ámbito musical en el que los valores de Y se asignasen a las alturas) y esta transformación tendrá un 50% de probabilidades de que ocurra.

La transformación 2 es más compleja pues los valores a , b , c y d del grupo de afinidad trabajan a la par; podríamos predecir que habrá algún tipo de rotación y contracción. Sería posible

deducir el ángulo en radianes a través de la relación de los coeficientes **a**, **b**, **c** y **d** y la función arcotangente mediante:

$$\text{ángulo} = \arctan(c/a) = \arctan(-b/d)$$

lo que en este caso nos daría un ángulo de 60 grados. Tendremos igualmente desplazamiento en **X** y en **Y**; por otra parte la transformación tendrá un 50% de posibilidades de darse.

	a	b	c	d	e	f	p
Transformación 1	0.333	0	0	0.333	0	0	0.5
Transformación 2	0.166	-0.288	0.288	0.166	0.333	7	0.5

2.1

Por nuestra parte hemos adaptado el algoritmo a procesos de cálculo relacionados con el hecho musical. Debemos tener presente que partiendo de un objeto musical muy simple codificado numéricamente de forma semejante a lo comentado en el primer apartado, podemos llegar a complejísimas arquitecturas, que por otra parte están sujetas a límites de registro, unidades temporales y a un sinfín de condicionantes; por ello la herramienta únicamente operará en la parte positiva tanto de **X** como de **Y** del plano complejo. Además, se han introducido unos correctores en el algoritmo para que cuando se utilice el giro este no rompa la extensión total del proceso (que realmente sucede en el sistema) compensando el estiramiento necesario de los valores de **X** de modo que se mantengan las proporciones relacionadas con las cotas de duración establecidas a priori. De esta manera, el algoritmo está adaptado a la idea de la partitura codificada y se rodea de controles que hacen muy fácil su utilización. El algoritmo creado para este tipo de I.F.S. básicamente trabaja tomando un modelo musical y sometiénolo a una transformación un determinado número de veces, pero pueden hacerse varias transformaciones del modelo a la par y en varias iteraciones como se ha ido comentando a lo largo de este apartado. Con ello obtenemos un sinfín de copias del objeto musical (copias de carácter geométrico que, por otro lado, desde el punto de vista musical suenan completamente diferentes unas de las otras) en multitud de escalas y rotaciones que asignaremos al número de líneas instrumentales que se precisen. Con posterioridad y utilizando otras herramientas procederemos a los ajustes necesarios para que los instrumentos puedan abordar estos objetos resultantes.

Quisiéramos añadir que aunque se ha dicho que el proceso es contractivo, esto dependerá del valor de los factores de contracción tanto el de “**X**” como el de “**Y**”. Si su valor está entre 0 y 1 el proceso sí será contractivo; sin embargo, si es mayor de 1 éste será expansivo. Así, se puede llegar a una arquitectura musical resultante elaborada con varias transformaciones en la que unas crecen y otras decrecen.

Hay que ser cauto con el número de iteraciones pues, como hemos visto en líneas precedentes, con unas pocas de ellas disparamos el proceso rápidamente a cantidades astronómicas.

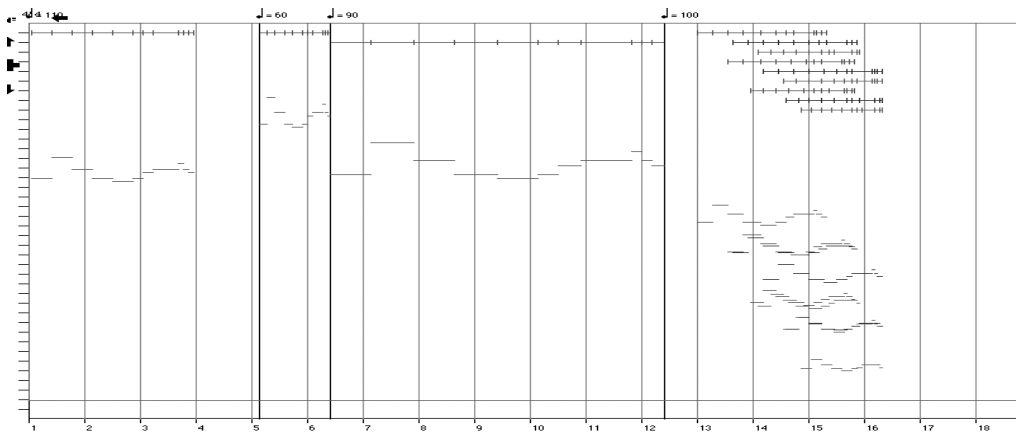
Se incluyó en el algoritmo un sistema de cálculo automatizado para encontrar la contracción de **X** y de **Y** así como el desplazamiento tanto de **X** como de **Y** con sencillos toques de ratón. El desplazamiento de **X** simplemente actuará cuando le indiquemos el lugar en donde queremos pegar el resultado (como se explica más abajo). La posibilidad de teñir cada transformación con un color diferente nos puede ayudar al seguimiento de estas estructuras en la partitura codificada.

Hay varias maneras de utilizar la herramienta con las que podremos obtener desde una simple contracción de un objeto al tamaño que se desee (en este caso su utilización estaría dentro de un ámbito llamémosle contrapuntístico, “quasi tradicional”, en el que podríamos hacer de forma sencilla las clásicas transformaciones de inversión, retrogradación, compresión, expansión, giros y mezclas de todos ellos) hasta un gran número de copias en distintas proyecciones del mismo (lo que es propiamente un I.F.S.). Cuando optamos por este segundo camino, deberemos tener en cuenta, tal y como se comentó al principio de este apartado, que cualquier objeto musical introducido en el sistema, terminará inexorablemente arrastrado hacia el atractor que le proyectan las tablas de transformación.

Es posible introducir determinados filtros previos de color de material o de voces. Con ello el algoritmo solo operará con lo que ha sido seleccionado y de este modo conseguimos fácilmente transformaciones de objetos que han sido limpiamente arrancados de otras estructuras de gran complejidad. El resultado de lo calculado se “pega” en un determinado espacio de la partitura codificada controlando la cantidad de tramo que precisemos.

Tal como está concebida la herramienta, es ideal para ajustar estructuras a determinadas cotas de registro y de emplazamiento de forma rápida y clara. El hecho de trabajar los cálculos directamente en la parte positiva del plano complejo elimina de antemano las situaciones imposibles (negativos, registros excesivos y otros); digamos que hace las interpretaciones de los datos numéricos “in situ”, aunque por otro lado pierde posibilidades.

A la izquierda de la imagen se puede apreciar un modelo de J.S. Bach (*Arte de la Fuga*) codificado ya numéricamente y bajo la doble visión de partitura codificada (1). A continuación, en la primera acotación temporal, una transformación del modelo con una contracción para las *X* de 0.453 y una expansión para las *Y* de 1.25 (2). Seguidamente, otra transformación del mismo modelo pero con valores de 2.062 y 1.5 para *X* e *Y* respectivamente y un desplazamiento de -36 en la coordenada *Y* (3). Le sigue el mismo modelo, pero esta vez con tres transformaciones y 3 iteraciones con diferentes valores en cada una de ellas (lo que sería propiamente un I.F.S.) (4). Abajo, en grafía tradicional, los ejemplos comentados.



- (1)
- (2)
- (3)
- (4)

(4)

The image displays a musical score for the piece 'Lineas de Fuerza' by Carlos Satué, covering measures 199 to 204. The score is written for a large ensemble, featuring ten staves. The top two staves are in treble clef, while the remaining eight staves are in bass clef. The music is marked with a forte dynamic (*ff*) throughout. The notation includes various rhythmic values, such as eighth and sixteenth notes, and rests. The bottom-most staff shows a dense, rhythmic accompaniment with many sixteenth notes.

La siguiente imagen muestran los compases 199-204 de la partitura general de Lineas de Fuerza (Carlos Satué) en cuya elaboración se utilizaron técnicas basadas en I.F.S. A continuación se muestra en detalle la sección de las maderas correspondientes a los compases 199-202.

This image shows a page of a musical score, likely for a symphony or orchestra. The score is written on multiple staves, with various musical notations including notes, rests, and dynamic markings. The notation is dense and complex, typical of a full orchestral score. The page is numbered 15 in the bottom right corner.



3. Objetos autosemejantes generados por sucesivas reintroducciones del modelo entre los espacios propiciados por el modelo mismo.

Basándonos en una idea que parte del I.F.S. y otros tipos de fractales se ha creado un algoritmo recursivo mediante el cual es posible obtener objetos musicales autosemejantes a partir de un modelo dado; el paradigma en esencia que ha inspirado, al menos en la primera fase, la elaboración de este algoritmo no es otro que el conjunto de Cantor. El Conjunto de Cantor, que fue descrito en 1883 (G. Cantor 1845-1918), es el fractal más importante y conocido; tanto es así que existen estrechas relaciones entre éste y un gran número de fractales descritos con posterioridad. De hecho, la primera parte del algoritmo que utilizamos opera principalmente como una variación de este famoso conjunto: se sustituye el hipotético segmento que existe entre cada dos puntos del modelo por el modelo mismo. El conjunto de Cantor continuaría, para que fuera tal, hasta el infinito; nosotros deberemos contentarnos con aproximaciones de pocas iteraciones.

Al igual que se ha comentado con anterioridad, necesitamos codificar numéricamente aquello que está en representación simbólica tradicional. Con posterioridad introduciremos dicho modelo dentro del plano complejo. El sistema trabaja reintroduciendo el propio modelo entre cada dos puntos de sí mismo teniendo en cuenta las compresiones necesarias tanto en los valores de X como en los de Y . Por lo tanto, necesitamos dos puntos complejos cada vez que efectuemos una reintroducción y por ello tendremos siempre n° de puntos -1 reintroducciones. Si lo deseáramos, al finalizar el cálculo, podríamos añadir la última nota del modelo a modo de tapón del objeto musical y así la arquitectura quedaría completa. Si al resultado de la primera iteración volvemos a aplicarle el mismo procedimiento, obtendremos la segunda, y así sucesivamente.

Utilizando técnicas fractales diferentes podemos obtener los mismos resultados (la curva de Koch conseguida a través de Sistemas L, de I.F.S. u otros algoritmos...); sin embargo cada uno de ellos tiene sus propias sutilezas y lo que, aparentemente resulta sencillo en unos, se complica sobremanera en otros. Quizá el camino que vamos a emprender, podría haberse conseguido con los I.F.S. pero deducir a priori el valor de los coeficientes resultaría prácticamente imposible. Nuestra idea es que el propio objeto se convierta en marco atractor de todo el proceso.

El algoritmo que se utiliza para generar estos objetos cuenta con múltiples variaciones respecto de la idea simplificada que acabamos de exponer, algunas de las cuales por su interés pasamos a comentar a continuación:

- Es deseable que cada iteración acumule la información de su precedente, aunque esto no necesariamente tiene por que ser así. Pensemos en el siguiente ejemplo: tomamos los puntos de partida y de llegada de una reintroducción (que son cualquier par de puntos consecutivos en la iteración n_1) como los extremos de una diagonal; con ésta construimos un cuadro imaginario donde introduciremos el modelo. Los puntos más altos del mismo, al adaptarse a las proporciones del cuadro tocarán su lado superior; lo mismo sucederá con los puntos más bajos respecto del lado inferior. De este modo, el punto primero no necesariamente coincidirá con el punto de arranque de la diagonal que ha generado el cuadro, sin embargo el objeto modelado por los límites de la caja es una réplica escalada del modelo de partida. Si quisiéramos que el resultado contuviese la primera nota del modelo de partida tendríamos que transportarlo hasta que el primer punto alcanzase el punto primero dicho modelo. Tendríamos que hacer lo propio con las sucesivas reintroducciones hasta completar la iteración.

Habitualmente cuando el punto primero de cualquier reintroducción es mas bajo que el segundo, el modelo devuelve un objeto reescalado igual. Cuando el primer punto es más alto que el segundo, en condiciones normales del algoritmo, el resultado aparece invertido con objeto de preservar en lo posible los contornos marcados por las cajas imaginarias donde se produce la contracción (el resultado es mas equilibrado en términos de autosemejanza); si positivamos todas las reintroducciones (por darle algún término a esta acción), el objeto, aunque conserva ciertas autosemejanzas, puede alejarse considerablemente al superponer el resultado de la iteración sobre el propio modelo de partida.

- El algoritmo puede aplicar determinados tipos de giros de forma global o local. Respecto de los primeros el mismo ángulo modificará cada una de las reintroducciones. En cuanto a los segundos cada reintroducción puede tener su propio ángulo basado en determinadas consideraciones.

Pongamos el siguiente ejemplo: pensemos que el modelo va a ser reescalado, no en función del cuadro imaginario que hemos comentado sino en función de la distancia de la diagonal del propio cuadro, adoptando la reintroducción el giro necesario para que descansa sobre la propia diagonal. Mediante este procedimiento conservaremos ciertas autosemejanzas, aunque el resultado diferirá considerablemente de lo obtenido bajo los procedimientos anteriores. El ángulo del giro vendrá dado teniendo en cuenta que la diagonal del cuadrado no es sino la hipotenusa que separa éste en dos triángulos, por lo que tendremos

$$\cos(\text{ángulo}) = \text{cateto } A / \text{hipotenusa}$$

(llamamos cateto A al que se encuentra frente al ángulo) y

$$\text{sen}(\text{ángulo}) = \text{cateto } B / \text{hipotenusa}$$

(llamamos cateto B al que se encuentra en el propio ángulo). De este modo, aplicando:

$$x' = \cos(\text{ángulo}) * x - \text{sen}(\text{ángulo}) * y, \quad \text{e} \quad y' = \text{sen}(\text{ángulo}) * x + \cos(\text{ángulo}) * y$$

obtendremos X' e Y' que serán los nuevos valores respecto de los puntos “ X ” e “ Y ” que son cada uno de los valores previos de la iteración n_1 o del propio modelo de partida si estamos en la iteración primera.

Al procedimiento hay que añadirle las contracciones necesarias según la razón que resulte al relacionar un hipotético cuadrado que encierre el modelo de partida y el cuadrado local donde va a ser confinado. Como vemos, los procedimientos son muy semejantes a lo que se ha utilizado en I.F.S. o en el espacio 3D.

En principio, cada objeto musical es capaz de generar, a través de este sistema, infinitas familias de arquitecturas con una sola procedencia común. Esto hace que el fenómeno sea de máximo interés a pesar de que no todos los resultados puedan sernos útiles.

La idea de utilizar el objeto resultante de forma completa es algo semejante al I.F.S., sin embargo el hecho de desmembrar el proceso y darle otro punto de vista podría resultar mucho más interesante. En las siguientes líneas explicamos esta forma de actuar.

Una vez que hemos operado con alguno de los procedimientos que nos ofrece el algoritmo obtenemos 2 listas, una de valores “X” y otra de valores “Y” que pueden ser tomadas como listas de valores independientes que conservan determinados tipos de autosemejanza en sí mismas. A partir de ellas podríamos confeccionar un objeto nuevo en base a éstas u otras listas que hayan sido obtenidas de la forma que hemos comentado, pero a partir de otros objetos, y realizar convoluciones entre ellas. Piénsese por ejemplo que la lista de “X” obtenida a partir de un objeto musical de partida servirá para determinar las duraciones de un nuevo objeto (podría servir para cualquier otro parámetro musical tal como alturas, dinámicas, etc...). La lista de “Y” hará lo propio para las alturas (podría ser una lista de un modelo de partida distinto del de “X”). Cada lista puede ser asignada al parámetro musical que deseemos; si nos faltan listas podemos confeccionarlas mediante un tratamiento diferente del propio modelo de partida o a partir de otro nuevo. En el camino de la adjudicación de estas listas podemos excluir aquellos valores que estén fuera de los rangos del parámetro musical que llevemos entre manos, o bien comprimirlos mediante un factor contractivo nuevo, o bien transportarlos mediante una simple suma o resta, todo ello con objeto de buscar el mejor emplazamiento posible de la lista. Si solo deseamos trabajar con unas pocas listas tenemos otra opción: tomar valores por defecto a la hora de calcular el nuevo objeto musical (por ejemplo tomando dinámicas *fff* para cada punto). El construir un nuevo objeto musical con estos procesos cuenta con no pocas dificultades técnicas además de las referidas a las del propio pensamiento; todo ello nos obliga a tomar decisiones que nos llevarán a resultados absolutamente distintos incluso trabajando con las mismas listas al hacer lecturas diferentes del proceso.

Pongamos el siguiente ejemplo: partimos de dos simples listas, una para las alturas y otra para las dinámicas. El resto de los parámetros se toman por defecto (impactos cada 1, duraciones a 1, materiales en color 1 etc...). Ahora aplicaremos esto a una línea instrumental. Nuestro resultado será una secuencia lineal de duraciones de valor uno, material en color 1 y será en las alturas y en las dinámicas donde tendremos reflejadas las posibles autosimilitudes que confirió el modelo de partida. Se obtendría otra lectura pasando una de las lista a los impactos. Entonces las notas del objeto resultante tendrían la posibilidad de sobreponerse creando polifonías a la par que podrían dejar multitud de espacios vacíos. Si el proceso estuviese pensado para un instrumento monofónico deberíamos eliminar los puntos donde coinciden varias notas bajo reglas del tipo “quédate sólo con la última”; si deseamos conservar toda la polifonía generada deberemos tener presente que los propios límites del sistema ponen freno al acumulo de cierto número de notas por línea instrumental, con lo que habrá que echar mano de un número de líneas instrumentales suficientes para que puedan absorber semejante cantidad de notas a la vez. Con todo ello el resultado tendrá un aspecto completamente diferente a lo aplicado a una sola línea. Con este tipo de problemas nos encontramos cuando pasamos estructuras numéricas desde el plano complejo a la partitura codificada en cualquier tipo de herramienta que utilicemos. A pesar de ello no vemos estos hechos como algo fastidioso, sino todo lo contrario. La inmensa capacidad de variación a partir de un mismo proceso amplía las posibilidades del compositor y permite a partir de mínimas modificaciones sobre un mismo objeto obtener resultados fuertemente cohesionados que de otro modo hubiesen sido imposibles.

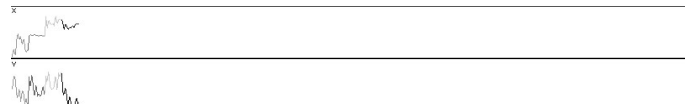
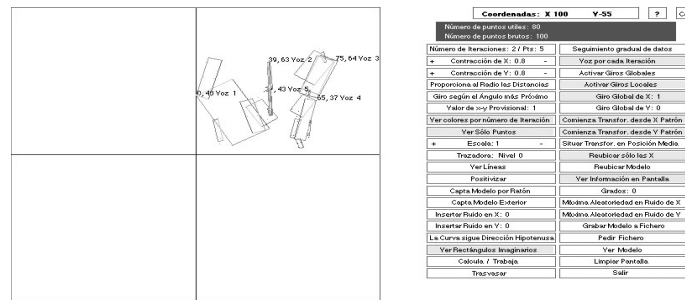
Según la longitud del modelo tendremos más o menos posibilidad de un alto número de iteraciones (debido a la memoria disponible y también a las posibilidades de aplicación sobre nuestra música, pues debemos pensar que podríamos obtener resultados excesivamente largos ya que el crecimiento es exponencial).

A continuación ilustramos el proceso descrito de un modo gráfico:

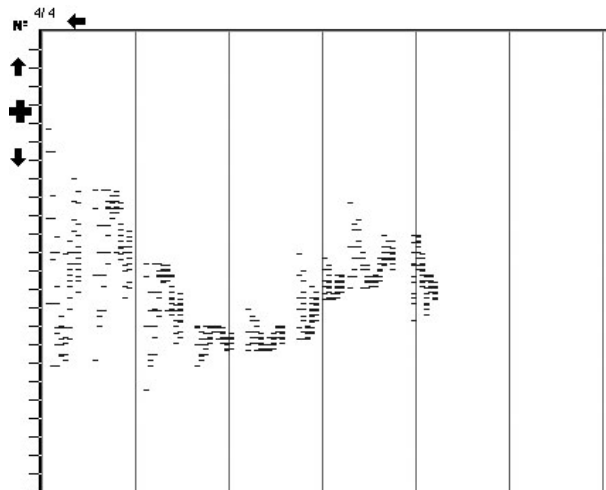
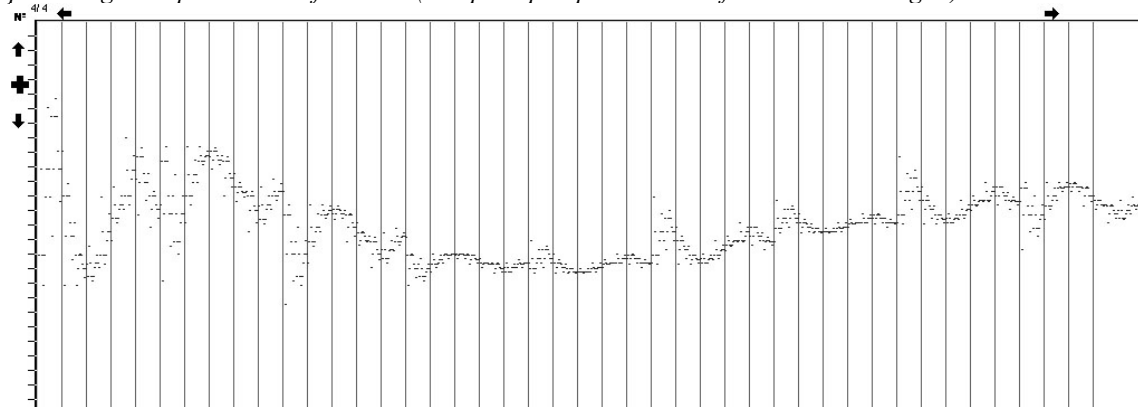
Mediante “cliks” de ratón se han introducido cinco puntos en la parte positiva del plano complejo (gráficamente, una especie de “M” que ocupa todo el espacio). Tomados como modelo, ponemos en marcha el proceso en una iteración (imagen de la izquierda) y en tres iteraciones (derecha). Los puntos están unidos mediante líneas con objeto de seguir mejor el proceso.



La imagen que sigue es un nuevo ejemplo en el que se activó la función “Giros locales”. Debido a esto, aparecen los cuadrados contenedores con diversos ángulos de giro.



Una vez terminado el cálculo de este primer paso, obtenemos dos listas (X,Y) que podemos vislumbrar de una manera gráfica encima de estas líneas. Cada transformación cuenta con un color diferente para poder seguir el proceso con facilidad (aunque aquí aparecen en diferentes tonos de gris).

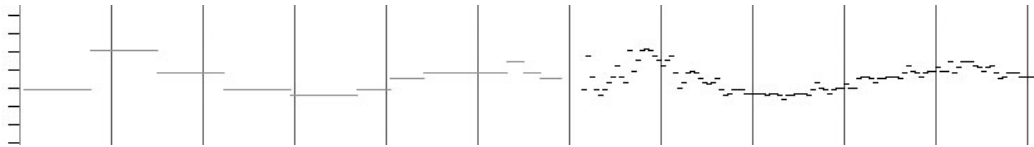


Arriba, en visión de duración-alturas el resultado del segundo objeto de cinco puntos mencionado. Tras habérsele aplicado varias iteraciones únicamente se toman los valores de la lista de “Y” y se aplican a una línea instrumental y dejando los demás valores por defecto. A la izquierda el mismo objeto, esta vez utilizando además la lista de “X” para los impactos.

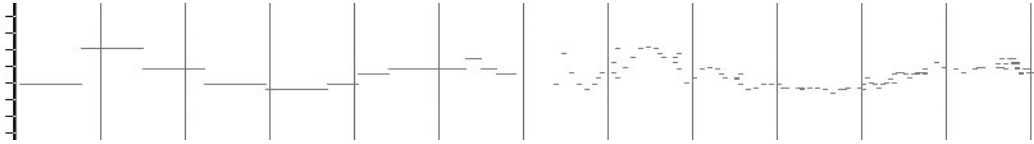
Nuevamente debemos hacer alusión al fenómeno del redondeo. Las posiciones decimales de Y se redondean a cuartos de tono, pero las de X, al redondearse, pueden concentrarse en un mismo punto configurando un acorde que en ocasiones puede ser de considerable grosor, tal como se puede apreciar en la imagen.

A continuación se muestra un ejemplo basado en el tema del Arte de la Fuga de Bach.

La siguiente imagen muestra el modelo y seguidamente el resultado de la “fractalización” en una iteración, tomando únicamente los valores de las alturas y secuenciándolos en valores de uno.

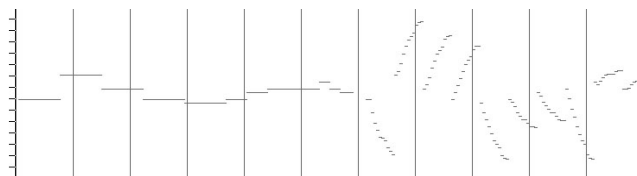


El mismo ejemplo, pero se ha considerado la lista de X como generadora de impactos; la coincidencia de estos debido al redondeo, crea polifonía.

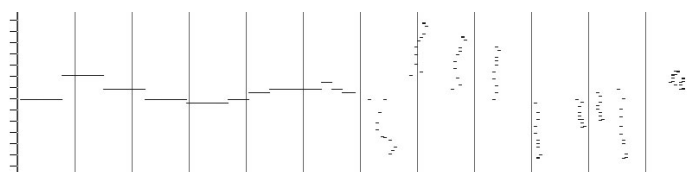


La primera línea, tema del Arte de la Fuga. La segunda línea, una dilatación con objeto de hacer más poroso el tejido a la hora de "fractalizarlo".
 La tercera línea, nos muestra el modelo con una iteración operando sólo en alturas y el resto de valores, por defecto.
 De la 4 a la 7, el mismo ejemplo de la línea tres pero teniendo en cuenta la posición de los impactos y creando polifonía donde hay coincidencia de estos. El resto de los parámetros, por defecto.
 El cuarto de tono aparece indicado con una flecha en color rojo.

A partir del mismo modelo de Bach y utilizando giros globales de -90° , se consigue transformar el material drásticamente como se puede apreciar en la imagen contigua. La pequeña inclinación responde a la secuenciación de la lectura de Y al no tenerse en cuenta la posición de X.



El mismo ejemplo que el anterior tratando la lista de X como impactos que, en su coincidencia, crean conglomerados polifónicos.



La primera línea muestra otro ejemplo en una iteración, en el que han operado giros de -90 grados y actuando sólo las alturas; el resto de los valores, por defecto. El resto es el mismo ejemplo pero se han considerado los impactos, por lo que se crea un tejido polifónico en la coincidencia de los valores redondeados de X.

Antes de concluir quisiéramos comentar que no hace mucho se ha añadido una nueva propuesta que aumenta ampliamente las posibilidades de la herramienta. Se trata de un factor contractivo o expansivo tanto para X como para Y que no actuará en las notas originales del modelo o de la iteración en la que nos encontremos. De este modo conservaremos los puntos de la iteración previa. Con este procedimiento se obtiene una especie de objeto en perspectiva. Otra posibilidad es que el factor sea negativo, con lo que producirá el resultado inverso respondiendo a otro tipo de autosemejanzas.

En la imagen siguiente se puede apreciar lo antedicho: a la izquierda, una vez dilatado el modelo para hacerlo más poroso, el resultado de aplicar un factor expansivo en Y con valor de 3. Le sigue, a su derecha y en color claro, el mismo objeto pero con un factor contractivo de -3, también en el parámetro Y . Por último, el modelo original de Bach. Debajo, y a continuación, su representación en grafía tradicional; para su seguimiento, los puntos originales del modelo están marcados con un gran acento.

4. Posibles aplicaciones musicales del Movimiento Browniano.

Cuando nos fijamos en un haz de luz percibimos que muchas partículas de polvo se mueven en multitud de direcciones sin seguir aparentemente ningún tipo de patrón; también sucede algo parecido si diluimos polvo de colores en un recipiente con agua en el que, tras conseguir una primera suspensión, percibiremos que hay pequeñas partículas que cambian incesantemente su posición de manera caprichosa. Todas estas partículas se mueven en un fluido (aire en el primer caso y agua en el segundo) y este movimiento continuo e irregular se conoce como Movimiento Browniano (M.B.).

En 1828 Robert Brown (1773-1858) observó el fenómeno en una solución de polen de *Clarkia pulchella* en agua. Ni Brown ni más tarde Faraday supieron explicar el fenómeno. En 1900 Louis Becherer (1870-1946) estableció el primer modelo y las primeras aplicaciones. Años más tarde A. Einstein realizó su célebre trabajo dando una explicación al M.B. a través de la hipótesis atómica. El trabajo de Einstein posibilitó que Perrin pudiera calcular el número de Avogadro; este autor demostró la existencia de átomos de tamaño finito e intuyó el enlace entre las trayectorias del M.B. y funciones continuas no diferenciables. En 1926 recibió el Nobel de Física por sus trabajos sobre M.B. En 1923 Wiener (1874-1964) construyó un modelo matemático de tipo aleatorio para simular el M.B. comprobando, junto con Paley y Cygmund, que casi todas las trayectorias no son diferenciables en todos sus puntos. En 1939 Paul Lévy publicó un análisis exhaustivo sobre M.B. En 1968 Mandelbrot y Van Ness introdujeron el M.B. fraccionario, en cuya descripción aparece un parámetro relevante: H (exponente de Hurst) cuyo valor para el M.B. estándar es de $\frac{1}{2}$ y controla la rugosidad de los resultados en base a dicho exponente.

Si observamos una partícula sometida a M.B. a intervalos regulares de tiempo percibiremos constantes cambios de dirección en su desplazamiento. Si partimos en dos cada intervalo anterior veríamos cada uno de ellos con desplazamiento y tamaño distintos. El M.B. es continuo aunque sus cambios de dirección permanentes y bruscos lo hacen no diferenciable; sin embargo posee una regularidad de tipo estadístico que le permite ser clasificado como un fractal de tipo aleatorio.

La regularidad estadística se manifiesta en que el valor medio del cuadrado de la longitud del desplazamiento experimentado por una partícula sometida a M.B. es proporcional al tiempo que invierte en dicho desplazamiento.

Así si $\mathbf{X}(t)$ expresa la posición en el instante "t" de la partícula en el espacio y utilizamos $\langle \mathbf{E} \rangle$ para la esperanza de la variable aleatoria \mathbf{E} , tenemos:

$$\langle |\mathbf{X}(t+r) - \mathbf{X}(t)|^2 \rangle = s^2 * r$$

donde s^2 es la varianza de los desplazamientos correspondientes a $r=1$ y $\mathbf{X}(t)$ es la posición de la partícula en el instante r .

El M.B. se aplica a multitud de disciplinas, adaptando en cada una de ellas los algoritmos de forma particular. Podemos ver aplicaciones del M.B. en predicciones del comportamiento de la bolsa, simulación de montañas o nubes en diseño gráfico, simulación de movimiento de partículas en procesos físicos... La música también puede beneficiarse de esta interesante herramienta y adaptarla, como hace tiempo que se ha ido haciendo, a determinados procesos de la composición. Cada compositor ha buscado la forma de adaptar el algoritmo a sus propias necesidades. Aquí únicamente tocaremos nuestra propia experiencia así como el modo en que Francisco Guerrero trabajó con el mismo.

Una de las técnicas utilizadas para la simulación del M.B es la del algoritmo del punto medio. Esta técnica recursiva parte de los valores de los puntos extremos de un segmento para calcular el valor del punto medio del mismo, utilizando una variable aleatoria Gaussiana la cual se sumará a dicho punto medio.

Con posterioridad se hicieron algunos añadidos y modificaciones de modo que el algoritmo utilizado en el programa resultase más maleable a la hora de conseguir ciertos resultados como detallaremos posteriormente. El programa trabaja el M.B. en tres dimensiones

y lo hace partiendo de un punto de inicio (que al ser introducido en el proceso podría modificarse en dependencia de los valores que hayamos asignado a los distintos parámetros de partida) y llega hasta un punto de finalización que también es modificable por las mismas razones que han sido expuestas para el punto de partida. De este modo, cuando se introduzcan varios puntos con los que operar, el proceso comenzará entre los dos primeros; una vez que termine lo hará entre el segundo y tercero y así sucesivamente hasta alcanzar el último. El proceso más bien recuerda a interpolaciones brownianas entre los puntos fuente (aunque los puntos fuente están influenciados por los parámetros de partida y son trastocados en dependencia de éstos últimos). El entorno gráfico del programa es altamente intuitivo con objeto de facilitar el manejo de las distintas opciones que nos ofrece. La introducción de puntos a partir de los cuales trabajará el algoritmo puede hacerse mediante simples clicks de ratón, introduciendo un tramo de música codificada numéricamente de forma semejante a como se explicó en otros apartados o bien pueden utilizarse objetos numéricos de otras fuentes exteriores al programa.

Por un lado disponemos del control de las tradicionales variables que encierra el algoritmo, como son los valores que detallamos a continuación:

-**Semilla:** parámetro que utiliza el generador de números gaussianos para crear la matriz de números aleatorios; con ella iniciamos la parte del algoritmo que se encarga de generar este tipo de números.

-**Sigma:** determina el índice de variación de un punto respecto al original. Cuanto mayor sea, mayor será la variabilidad de la curva obteniendo la misma picos y valles más pronunciados (a mayor valor más dispersión).

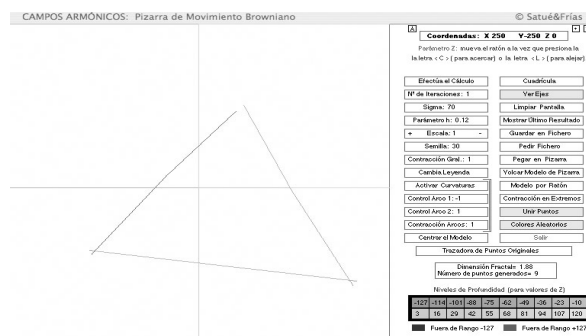
-**H:** (exponente de Hurst) que provocará cambios bruscos en el resultado (cuanto más pequeño sea este valor mayor agresividad de dispersión) y nos servirá para calcular la dimensión fractal (cuanto más pequeño sea su valor mayor dimensión fractal pues ésta puede calcularse mediante $d=n+1-H$).

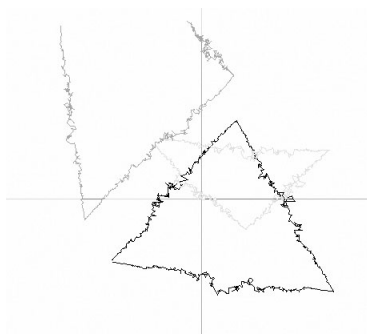
Según **H** (exponente de Hurst) el movimiento Browniano puede ser clasificado en tres categorías:

- $0 < H < 1/2$: el M.B va a tener una correlación negativa entre sus incrementos, así las curvas oscilan de forma más irregular y el movimiento generado se denomina antipersistente.
- $H = 1/2$: el M.B va a tener incrementos independientes rigurosamente azarosos.
- $1 > H > 1/2$: el M.B. va a tener una correlación positiva entre sus incrementos, oscilando las curvas más regularmente. Este tipo de movimiento se denomina persistente.

Al margen de estas variables podemos controlar, mediante otro valor, el número de iteraciones o veces que reintroduciremos el objeto sobre sí mismo. Debemos ser cautos pues, como todos los procesos fractales, tiene un crecimiento exponencial y tras unos pocos pasos podemos alcanzar cantidades astronómicas de números. Por otro lado, se dispusieron diversos comandos con objeto de complementar el algoritmo y nos permitieran adaptar los resultados hacia territorios cercanos a la música; esto obligó a pensar las cosas en términos de voces-instrumento.

Debajo, imagen de la herramienta en la que, mediante clicks de ratón, se ha configurado un objeto de cuatro puntos, tratando de acotar un área semejante a un triángulo. A pesar del aspecto, la imagen corresponde a un solo objeto.





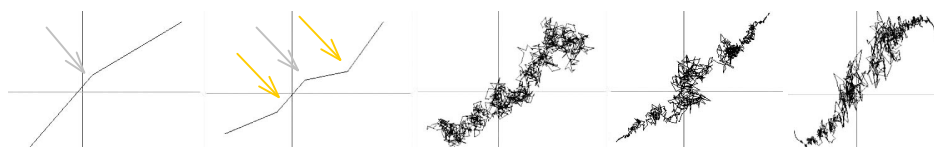
Pensemos que podemos introducir en el sistema tres o más voces-instrumentos, que cada una de ellas lleve un color propio de material y que tengan diferente número de puntos (imagen de la izquierda). El resultado no es el mismo si tratamos este objeto como una sola arquitectura conexas o bien como tres objetos independientes, que es a lo que más bien responde nuestra idea. El sistema está preparado para realizar los cálculos con independencia de los objetos, aunque a todos les serán aplicadas las mismas características de **Semilla**, **Sigma** y **H**. Esto nos puede ayudar a elaborar complejas

estructuras musicales basadas en el M.B.

El sistema trabaja como detallaremos a continuación y para ello utilizaremos el ejemplo más sencillo posible basado en dos únicos puntos de partida. Si a este modelo le queremos hacer una iteración, nos pondrá un punto supongamos alrededor de la zona media (esto dependerá de los valores de **Sigma**, **H** y **Semilla**); por otra parte, los puntos introducidos por nosotros los trastocará también en función de **Sigma** y **H** como se ha comentado anteriormente. Si el valor de **Sigma** es alto y el de **H** bajo, quizá el punto intermedio se aleje muchísimo tanto en valores de **X** como de **Y** de esta zona media y lo mismo sucederá con los puntos introducidos por nosotros (es por esto por lo que, en la primera imagen, los cuatro puntos introducidos, aparecen como seis ya que el segundo finaliza el proceso entre el 1 y el 2, pero a su vez es tomado de nuevo para abrir el siguiente proceso entre el 2 y el 3 y así sucesivamente). Cada vez que se repita el proceso, la posición de los cuatro puntos (o 6 según interpretemos) cambiará y no hay forma de predecir las posiciones; únicamente los valores de **Sigma** y **H** nos orientarán sobre el grado de dispersión. No obstante es posible elaborar una secuencia browniana más pura trabajando únicamente con dos puntos si ese es nuestro deseo.

Si hacemos dos iteraciones, la primera actúa como acabamos de describir y la segunda introduce un nuevo punto medio (con igualdad de características que el de la iteración 1) entre el primer punto introducido por nosotros (que ha sido modificado por el algoritmo) y el punto medio de la primera iteración; a continuación, se introduce otro nuevo punto medio entre el punto medio de la primera iteración y el segundo punto introducido por nosotros en el modelo (que igualmente ha sido trastocado por el algoritmo). Con esto se completaría la segunda iteración. Nuevas reintroducciones tomarían el modelo de la iteración precedente e introducirían nuevos puntos medios entre cada dos puntos de la fase anterior (que además serían cambiados por el propio algoritmo). Podemos imaginar el proceso con segmentos que se parten en dos a la vez que cambia la posición de los extremos. Así, tras muchas iteraciones, lo que era una línea recta se ha convertido en una curva tortuosa y caótica; por otra parte muy interesante para otros propósitos.

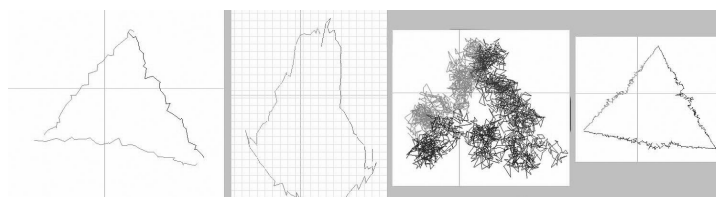
*En la imagen que sigue, el primer cuadro muestra una iteración entre dos puntos, con **Sigma** de 70 y exponente **H** de 0.12. Los puntos están unidos por rectas con objeto de apreciar mejor el proceso (obsérvese la inflexión alrededor del punto medio entre los dos puntos de partida). A continuación, los mismos valores en dos iteraciones (aquí se observan tres inflexiones: la central corresponde a la de la primera iteración y las otras dos, a la segunda iteración). Le sigue el objeto con diez iteraciones, manteniendo el resto de los parámetros iguales. A continuación, se activó el mecanismo de contracción en extremos. En el quinto cuadro, además, se utilizó una variación en el algoritmo que provoca la curvatura que se puede observar.*



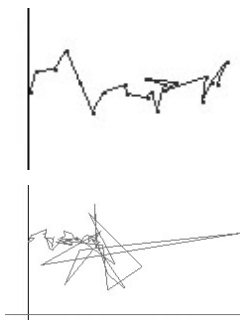
Debemos comentar que cada vez que ponemos en marcha el algoritmo el resultado obtenido es diferente, por ello el sistema siempre guarda el último de ellos con objeto de pasarlo a nuestra partitura codificada.

Uno de nuestros intereses era domesticar un poco estas curvas resultantes de modo que, a pesar de su imprevisible resultado, pudiesen encerrar modelos musicales sin que estos fuesen tocados. Para ello, se pensó que sería muy interesante que se moviesen únicamente aquellos puntos que no perteneciesen al modelo inicial, de modo que se desarrollaron varios sistemas correctores que aproximasen las secuencias brownianas hacia los puntos que ofrece el modelo de partida. Pensemos en un ejemplo que parte de un modelo de dos puntos en el que se va a realizar varias iteraciones. Nuestra idea sería aproximar paulatinamente la secuencia de puntos hacia los extremos, tanto al punto de partida como al de llegada y solamente en la zona media tendríamos las características de **Sigma** y **H** en su estado prefijado en los valores de partida. Hay varios tipos de algoritmos correctores que operan sobre la distancia media de cada dos puntos del modelo, unos basados en contractores cambiantes y otros en formulas cuadráticas que no vamos a comentar aquí. Al final lo que se consigue es que la curva browniana tenga una fuerte compresión en sus extremos (ver cuadro cuarto de la imagen superior). Existen comandos que nos permiten otro tipo de juegos como son la creación de grandes arcos de secuencias brownianas. Operan modulando la secuencia una vez que esta ha sido calculada (ver cuadro cinco de la imagen superior).

*En la imagen de abajo, podemos apreciar nuevos ejemplos generados a partir del triángulo que hemos visto al comienzo del apartado. El primer cuadro, responde a un **Sigma** de 70, exponente **H** de 0.12 y 8 iteraciones. El siguiente cuadro añade la función de activación de curvas. El tercero responde a un **Sigma** de 230 y 10 iteraciones. El último cuadro, muestra el mismo objeto (con un **Sigma** de 30 y 10 iteraciones) en el que se activó la función de contracción en extremos.*



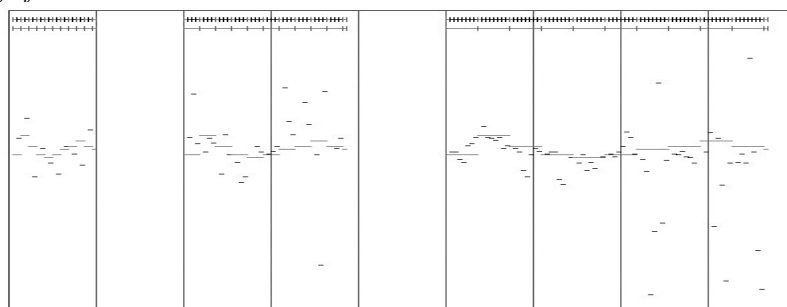
Aunque como hemos dicho anteriormente el algoritmo principal trabaja el M.B. en tres dimensiones sin embargo podemos hacer varios tipos de lectura y únicamente llevarnos una dimensión, como por ejemplo tomar solo los valores de **Y**, de **X**, o **Z** y aplicárselos a una secuencia de duraciones artificiales de valor 1, con impactos igualmente del mismo valor, dinámicas de *mf*, color de material 1...etc. Otro procedimiento de lectura sería en dos dimensiones, con lo que tomaríamos dos valores (habitualmente **X** para los impactos e **Y** para las alturas); este procedimiento es algo mas complejo pues necesita un plano de trabajo intermedio en el que recalcar el objeto. Como ejemplo pensemos en una hipotética espiral browniana. Si se lee de manera unidimensional en los valores de **Y**, al pasar esto a una voz obtendríamos aproximadamente una especie de curva sinusoidal creciente o decreciente según por donde comencemos. Este mismo objeto en el plano necesitaría varias voces para su transcripción ya que se sobremontarían ciertos impactos de **X** y crearían situaciones polifónicas. La lectura en tres dimensiones se hace como la de 2, reservando los valores de **Z** para la obtención de dinámicas, aunque los valores pueden intercambiarse. Debemos comentar que una curva browniana puede ocupar parte del plano complejo donde los valores son negativos o exceden las posibilidades de las alturas que nos permite el sistema (127), así pues habrá que adaptar el resultado mediante compresiones o proporciones como ya hemos explicado en otros apartados. Para todo ello existe una pizarra de implementación en la que se nos ofrece un abanico de posibilidades en la reinterpretación de lo obtenido en el algoritmo. Posteriormente pegaremos nuestro objeto en la partitura codificada según nuestros propósitos.



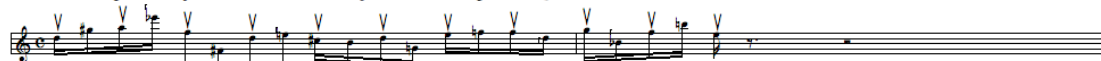
En la imagen de la izquierda, el motivo del Arte de la Fuga de Bach tomado como generador de una secuencia browniana en una iteración, **Sigma** 70 y dimensión **H** de 0.12. Debe estar activada la función de contracción en extremos para que los puntos originales sean preservados; de lo contrario, sufrirían las dispersiones, tanto en **X** como en **Y**, relativas a los parámetros de partida de **Sigma** y **H**.

En esta otra imagen, el mismo ejemplo con tres iteraciones y un valor para **Sigma** de 30 (un valor más alto dispersa tanto el resultado que, al ser necesaria su compresión, nos devuelve los puntos originales trastocados).

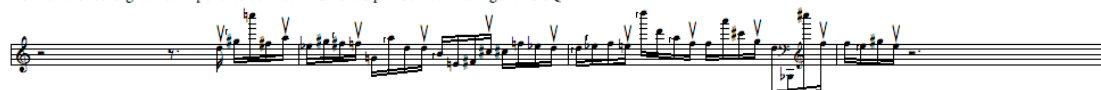
En la imagen inferior, el ejemplo mencionado de Bach, transcrito a partitura codificada. Únicamente se lee el parámetro **Y** dando un valor de 1 a las duraciones. Se observan tres secuencias: la primera corresponde a una iteración, la segunda a dos iteraciones y la tercera a tres. Más abajo, su transcripción a grafía tradicional.



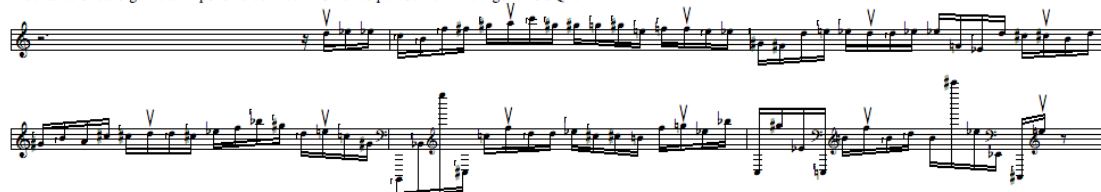
Una iteración. Sigma 70. Exponente de H 0.12. Uniendo puntos mediante algoritmo SQR.



Dos iteraciones. Sigma 70. Exponente de H 0.12. Uniendo puntos mediante algoritmo SQR.

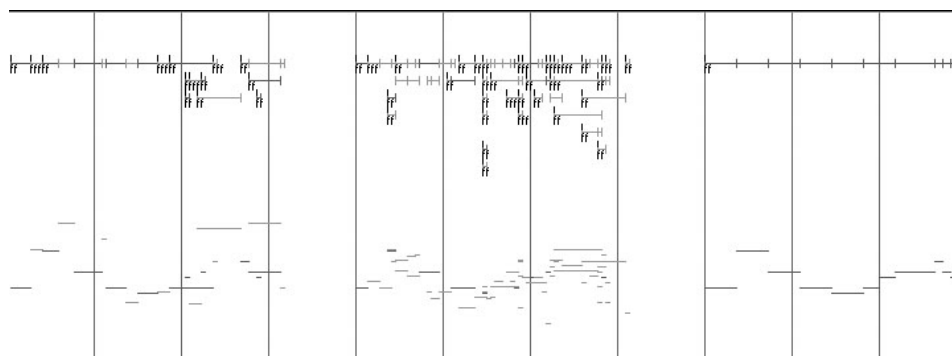


Tres iteraciones. Sigma 30. Exponente de H 0.12. Uniendo puntos mediante algoritmo SQR.

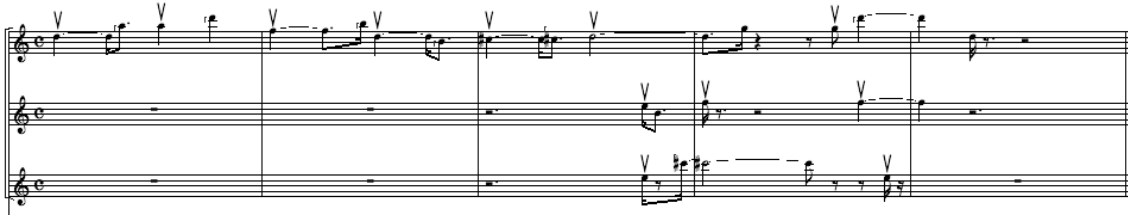


En la imagen superior, los acentos invertidos, nos marcan las notas originales de J. S. Bach. Insistimos en que los valores de las duraciones son artificiales: valor de 1.

En la imagen inferior, el ejemplo de Bach transcrito a partitura codificada; esta vez han sido transcritos los parámetros **X**, **Y** y **Z**. Se observan dos secuencias: la primera corresponde a una iteración, la segunda a tres. Algunas de estas notas no se aprecian debido a que se sobremontan los diferentes tonos en el redibujado. Más abajo, su transcripción a grafía tradicional.



El tema de Bach tras una iteración y después de su lectura en dos dimensiones: *X* e *Y*. La polifonía se crea por la simultaneidad de impactos debida al redondeo en el cálculo.

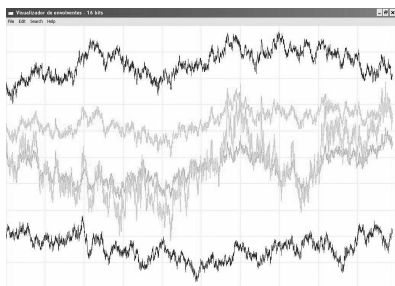


Tras tres iteraciones y con valor de **Sigma** 30, el objeto se transfiere leyendo *X* e *Y*. La polifonía, de nuevo, obedece a impactos coincidentes.



4.1

Tal como se apuntó al comienzo del escrito, comentaremos aunque sea de modo muy resumido algunos de los procedimientos que en relación al M.B. desarrollaron Francisco Guerrero⁽¹⁾ y Miguel Ángel Guillén⁽²⁾ (sin cuya colaboración nada de esto hubiese sido posible) y que, con posterioridad, Fco. Guerrero utilizó para la composición de los últimos números de Zayin⁽³⁾.



El gráfico que se adjunta, aunque no corresponde a ninguno de los utilizados por Guerrero, ilustrará de manera sencilla la explicación que a continuación detallamos:

Podemos apreciar tres tipos de curvas brownianas (cada especie de ellas en un tono diferente de gris) que, utilizando la nomenclatura de Guerrero y de Guillén, se denominan “Envoltentes”, “Semilla” (aunque coincide en el término, se trata de un concepto ligeramente distinto de la Semilla expuesta en líneas precedentes) e “Hilos”.

En un primer paso se elaboran las “Envoltentes” (en tono oscuro en el gráfico, ocupando la parte alta y baja del mismo) y la “Semilla” (en tono intermedio y situado en la parte central entre las envoltentes).

- Las “Envoltentes” determinan un espacio de carácter abstracto que modulará las curvas brownianas denominadas “Hilos”. Estas curvas no tienen que ver con el término “envolvente” de onda utilizado en electroacústica.
- La “Semilla” es otra curva browniana que tiene la misión de regular el comportamiento de los “Hilos”. Controla el grado de irregularidad de estos últimos haciendo que su proceder sea más o menos persistente. Provoca trayectorias ascendentes o descendentes en las que pueden aparecer

zonas con cambios bruscos o, por el contrario, paulatinos. Actúa como modelador de los “Hilos”.

- Las “Envoltentes” y la “Semilla” pueden ser calculadas independientemente o pueden albergar algún tipo de relación entre sí o incluso derivar unas de otras. Sobre ellas se puede actuar modificando el exponente de Hurst (recordemos que es el responsable del grado de irregularidad de una curva browniana). También es posible aplicar métodos tradicionales, tales como retrogradaciones, inversiones o inversiones retrogradadas.

- Los “Hilos” se generarán en una fase posterior (en el gráfico corresponden a las curvas brownianas de tono más claro) y es lo que se transformará en música. Su discurrir estará condicionado, como se ha dicho anteriormente, por el comportamiento de la “Semilla” y a la vez modulado por el espacio que definen las “Envoltentes”.

Previamente a la generación de los “Hilos” se definirán varios parámetros que expresarán la relación deseada entre “Hilos” y “Semilla”.

Es importante pensar que todas estas curvas definen modelos de comportamiento abstracto. Por otro lado será necesario completar el proceso con cierta información libremente elegida del tipo:

1-Registro sobre el que se van a mover las alturas.

2-Tipos de escala sobre la que se trabajará. En el caso de Guerrero siempre era de cuartos de tono.

3-Tramo de curva que se va a utilizar.

4-Esquema rítmico a desarrollar. Guerrero habitualmente lo hacía mediante un sistema aleatorio de tipo “Random”.

El proceso se completaba utilizando determinados filtros que posibilitaban tareas concretas, tales como la distribución de una sola curva browniana (un “Hilo”) entre un grupo de instrumentos, o el intercambio de parámetros del tipo alturas transformadas en rítmica o viceversa.

La imagen corresponde a un tramo de Zayin III elaborado mediante las técnicas que se acaban de describir.

(1) 1951-1997

(2) 1962-2007

(3) Serie escrita para cuerda con dicho título (compuesta por 8 números). Hay un C.D. editado con referencia: DS-0127//Música de Andalucía//Almaviva//WDR. La interpretación corre a cargo del cuarteto de cuerda “Arditti string quartet”. Otras referencias de Francisco Guerrero en <http://Brahms.ircam.fr/textes/c00000939/index.html>

5. Bibliografía

- 1- Benoît Mandelbrot. The fractal geometry of nature. Traducción al castellano de Joseph Llosa. La geometría fractal de la naturaleza. Metatemas 49. Tusquets Editores. 1997.
- 2-Miguel de Guzmán, Miguel Ángel Martín, Manuel Morán, Miguel Reyes. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Labor matemáticas. Editorial Labor, S.A.1993.
- 3-Edward N. Lorenz. The essence of chaos. Traducción al castellano de Francisco Paez de la Cadena. La esencia del caos. Editorial Debate, S.A. 1995
- 4-Peter Smith. Explaining Chaos. Traducción al castellano El Caos. Una explicación a la teoría. Traducción de Antonio Resines y Herminia Bevia. Cambridge University Press, Madrid, 2001.
- 5-Javier Barrallo Calonge. Geometría fractal. Algorítmica y representación. Ediciones Anaya Multimedia, S.A. 1993
- 6-Iannis Xenakis. Musiques formelles. Nouveaux principes formels de composition musicale. Éditions Richard-Masse,1963.
- 7-Iannis Xenakis. Musique. Architecture. Casterman, 1976. Traducción al catalán por Anna Bofill. Música Arquitectura. Publicado por Antoni Bosch, editor, S.A. 1982.
- 8-Franck Jedrzejewski. Mathematical Theory of Music, Edition Delatour France, 2006. Collection dirigée par Jean-Michel Bardez (SFAM) et Moreno Andreatta (Ircam/CNRS).
- 9-Carlos Agon, Gérard Assayag, Jean Bresson editors. The OM composer's book 1. Collection dirigée par Jean-Michel Bardez (SFAM) et Moreno Andreatta (Ircam/CNRS). Coédition Ircam - Centre Pompidou / Delatour France, 2006.

5.1 Páginas web:

Es abrumador el número de páginas que podemos encontrar en relación a los fractales simplemente tecleando “fractals” en el buscador. A continuación señalamos algunas en las que asiduamente hemos consultado información:

<http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/>

<http://www.fractalus.com>

<http://www.quanta.net.py/zfractal/mainmenu.htm>

<http://es.wikipedia.org/wiki/Fractal>

<http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/geomfrac/proyectos/tutorial-mov-brow/pagina%20inicio.htm>

http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/ifs_hedgehog/

<http://www.btinternet.com/~ndesprez/manual/attractors.htm#ifs>

Quisiéramos remarcar especialmente la página del compositor Iannis Xenakis. A pesar de no tocar el tema de los fractales en relación con la música, es el pionero en relación a las técnicas compositivas que utilizan modelos estocásticos, de estrategia musical, simbólicos y otros relacionados con técnicas que derivan del estudio del caos.

<http://www.iannis-xenakis.org>

En nuestra página web damos cuenta del resultado de nuestra búsqueda en esporádicas actualizaciones.

<http://www.carlossatue.com>